第8講　実践演習問題 第1問

第1問 （必須問題）

〔1〕

(1) 実数 x について，条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q とし，以下のように定める。

条件 p：x は 4 の倍数である。

条件 q：x は 2 の倍数である。

命題「$p \Rightarrow q$」は真であるが，このとき成り立つ関係を表す記号を次の⓪～⑤の中から二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。 [ア] ， [イ]

⓪ $P \subset Q$　① $P \supset Q$　② $\overline{P} \subset Q$

③ $P \supset \overline{Q}$　④ $\overline{P} \subset \overline{Q}$　⑤ $\overline{P} \supset \overline{Q}$

(2) 自然数 x，y について，条件 r，s を以下のように定める。

条件 r：$xy < 4$

条件 s：$x + y \leqq 3$

命題「$r \Rightarrow s$」が真であるか偽であるかを求め，真である場合はその証明を，偽である場合は考えられる反例をすべて表せ。

また，r であることは s であるための [ウ] である。 [ウ] に入るものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

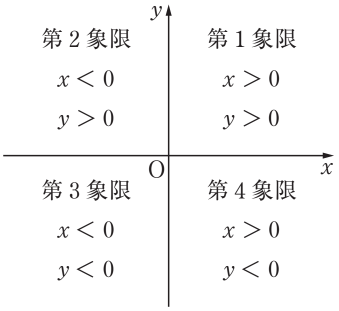
⓪ 必要十分条件である。

① 必要条件であるが，十分条件ではない。

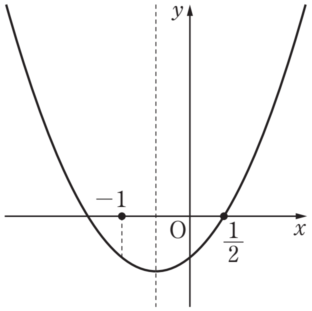
② 十分条件であるが，必要条件ではない。

③ 必要条件でも十分条件でもない。

〔２〕 座標平面は，x 軸，y 軸によって，4つの部分に分けられる。これらの部分を「象限」といい，右の図のように「第1象限」，「第2象限」，「第3象限」，「第4象限」という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。



(1) 2次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフは右図のようになっていた。このとき，次の値の符号について正しいものを，次の⓪～②のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。



a は [エ]

b は [オ]

a^2-4b は [カ]

$a+b+1$ は [キ]

⓪ 正　　① 0　　② 負

(2) 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ において，$y=f(x)$ のグラフがすべての象限を通るための条件を求める。

(i) $a=0$ のとき，グラフは直線になるので，すべての象限を通ることはできない。

(ii) $a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線だから，第1象限と第2象限は必ず通る。第3象限と第4象限を通るための条件は，頂点の y 座標と $f(0)$ の符号に注目して，[ク] となる。

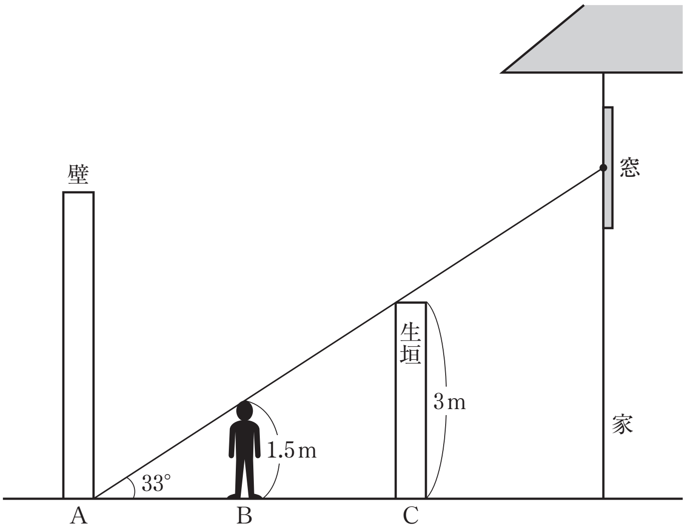
(iii) $a<0$ のときも同様に考えて，求める条件は [ケ] となる。

[ク]，[ケ] に当てはまるものを次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

⓪ $b>0$　　① $b<0$　　② $b\geqq 0$　　③ $b\leqq 0$

④ $c>0$　　⑤ $c<0$　　⑥ $c\geqq 0$　　⑦ $c\leqq 0$

〔3〕 下の図のように建築中の家があり，地点Cに高さ3メートルの生垣がある。家の前の通りを歩く人からできるだけ部屋の中を見られないようにしたいと考えているが，生垣で窓が全く見えなくなるのは身長150cmの子どもが通りを歩いたときに生垣から何メートル離れた地点までか考えたい。子どもの位置をBとする。地点Aは通りの向かい側の壁の立つ場所であり，地点Aと生垣の一番上までの地面とのなす角は33°である。BCの長さを角度33°の三角比の値を用いて表せ。ただし，壁，生垣と子どもの体の幅は考えないものとする。



〔４〕　三角形 ABC の辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，∠CAB，∠ABC，∠BCA の大きさをそれぞれ A，B，C とする。

健一さんと由美子さんは三角形 ABC について

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　…（＊）

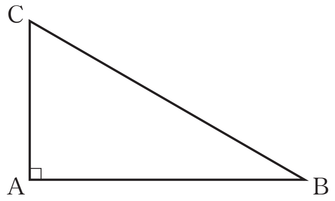
が成り立つことを知り，その理由について，考察することにした。

（＊）は一般的に余弦定理と呼ばれており，三角形が成立していれば常に成り立つことがわかっている。

(1)　健一さんはまず直角三角形の場合を次のように考察した。

《健一さんの直角三角形についての考察》

右図のような，$A=90^\circ$ の直角三角形を考える。



三平方の定理から

$$a^2=b^2+c^2$$

が成立する。$A=90^\circ$ のとき，

$\cos A=$ 【コ】

なので，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

よって，$A=90^\circ$ であれば，（＊）が成り立つ。

【コ】 に当てはまるものを次の⓪～④のうちから一つ選べ。

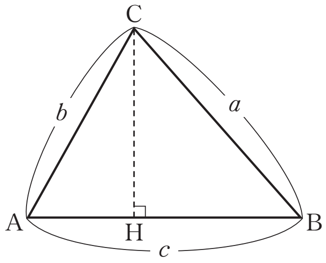
⓪ 0　　① 1　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　④ -1

（第１問〔４〕は次ページに続く。）

(2)　由美子さんは鋭角三角形でも(＊)が成り立つかどうかを考察した。

《由美子さんの鋭角三角形についての考察》

右図のように，鋭角三角形を考える。



点Cから辺ABへ垂線CHをおろし，

△ACHに着目すると，

AH＝ サ

CH＝ シ

となり，したがって，BH＝c－ サ と表せる。

よって，△BCHにおいて三平方の定理より，

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2$

$=($ シ $)^2+(c-$ サ $)^2$

これを整理すると，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となる。

よって，鋭角三角形のときも(＊)は成り立つ。

サ ， シ に当てはまる最も適当なものを次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

⓪ $a\sin A$　① $a\sin B$　② $b\cos A$　③ $b\cos B$

④ $a\tan A$　⑤ $b\sin A$　⑥ $b\tan A$　⑦ $b\tan B$

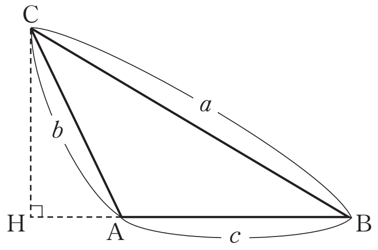
(第１問〔４〕は次ページに続く。)

(3)　最後に２人は鈍角三角形についても(＊)が成り立つかどうか考察した。

《2 人の鈍角三角形についての考察》

A が鈍角の三角形を右図のように考える。

点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろす。



∠CAH＝180°－A となるので，

　sin(180°－A)＝ ス

　cos(180°－A)＝ セ

を利用すると，

　AH＝ ソ

　CH＝ タ

となるので，△BCH において三平方の定理より，

　$BC^2=BH^2+CH^2$

　　　$=(BA+AH)^2+CH^2$

であるので，これに BA＝c，AH＝ ソ ，CH＝ タ を代入して整理すると，

　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

よって，鈍角三角形のときも(＊)は成り立つ。

ス ，セ ，ソ ，タ に当てはまる最も適当なものを次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。

⓪　$\sin A$　①　$-\sin A$　②　$\cos A$　③　$-\cos A$　④　$b\sin A$

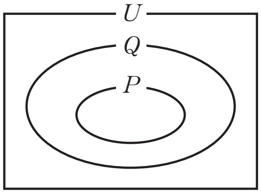
⑤　$b\cos A$　⑥　$a\sin A$　⑦　$a\cos A$　⑧　$-b\sin A$　⑨　$-b\cos A$

第８講　実践演習問題 第１問

第１問

〔１〕

⑴　実数全体の集合を U，条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q とすると，$p \Longrightarrow q$ が真であることから，右図のようなベン図となり，$P \subset Q$（⓪）および $\overline{P} \supset \overline{Q}$（⑤）が成り立つ。



⑵　条件 r は満たすが，条件 s は満たさない例（反例）が存在すれば命題 $r \Longrightarrow s$ は偽である。

条件 r：$xy<4$ を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)$ のみであり，

このうち，$x+y \leqq 3$ を満たさないものは $(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ である。

よって，命題 $r \Longrightarrow s$ は偽であり，反例は $(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ のみ。

条件 s：$x+y \leqq 3$ を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ のみ。

これらはすべて条件 r を満たすことから，命題 $s \Longrightarrow r$ は真。

したがって，r であることは s であるための必要条件であるが十分条件ではない（①）

〔２〕

⑴　$y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$ よりグラフの頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$$

グラフより軸は負なので，$-\frac{a}{2}<0$　すなわち，$a>0$ つまり a は正（⓪）

また，y 切片は負なので，$b<0$　つまり b は負（②）

グラフは x 軸と異なる２点で交わるので，頂点の y 座標は負であることから，

$-\frac{a^2}{4}+b<0$　すなわち $a^2-4b>0$ つまり a^2-4b は正（⓪）

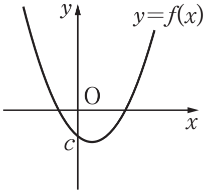
$a+b+1$ は，$y=x^2+ax+b$ において $x=1$ のときの y 座標であり，

グラフよりそれは正である。したがって，$a+b+1$ は正（⓪）

(2)　$a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線となり，これがすべての象限を通るためには，グラフが右図1のようになればよいので，軸の正負にかかわらず，$f(0)<0$ であればよい。したがって，$c<0$（⑤）

このとき，右図1のように頂点の y 座標は必ず負になる。

図1



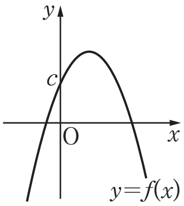
$a<0$ のとき，グラフは上に凸の放物線となるので，第3象限と第4象限は必ず通る。よって，グラフがすべての象限を通るためには，右図2のようになればよいので，

軸の正負にかかわらず，$f(0)>0$ であればよい。

したがって，$c>0$（④）

このとき，右図2のように頂点の y 座標は必ず正になる。

図2

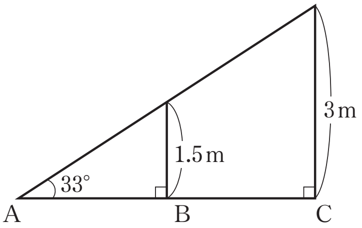


〔3〕

地点Aから生垣のある地点Cまでの

距離ACについて，

$\dfrac{3}{\text{AC}}=\tan 33^\circ$ より $\text{AC}=\dfrac{3}{\tan 33^\circ}$



相似な図形を考えて，

$\text{AB}:\text{AC}=1.5:3=1:2$ より $\text{AB}=\dfrac{1}{2}\text{AC}$

よって，$\text{BC}=\text{AC}-\text{AB}=\text{AC}-\dfrac{1}{2}\text{AC}=\dfrac{1}{2}\text{AC}=\dfrac{3}{2\tan 33^\circ}$ (m)

〔4〕

(1)　$A=90^\circ$ のとき $\cos A=\cos 90^\circ=0$（⓪）

(2)　三角比の定義から

$$\frac{\text{AH}}{\text{AC}}=\cos A \text{ より } \text{AH}=b\cos A \text{（②）}$$

$$\frac{\text{CH}}{\text{AC}}=\sin A \text{ より } \text{CH}=b\sin A \text{（⑤）}$$

したがって，$\text{BH}=c-b\cos A$

よって，△BCHにおいて三平方の定理より

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2$

$=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$

$=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A$

ゆえに $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となる。

(3)　$\sin(180°-A)=\sin A$（⓪）

$\cos(180°-A)=-\cos A$（③）

を利用すると，

$\mathrm{AH}=b\cos(180°-A)=-b\cos A$（⑨）

$\mathrm{CH}=b\sin(180°-A)=b\sin A$（④）

となるので，△BCH において三平方の定理より

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2$

$=(\mathrm{BA}+\mathrm{AH})^2+\mathrm{CH}^2$

$=(c-b\cos A)^2+(b\sin A)^2$

$=c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A$

ゆえに $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となる。